

Aleksandra ANUSIK\*

## BADANIE ODDZIAŁYWANIA ZJAWISK NIEPEWNYCH NA PARAMETRY MODELU BLACKA–SCHOLESZA

Istotnym zagadnieniem w przypadku kontraktów opcyjnych jest ich wycena. Stosuje się do niej różnego rodzaju modele, z których najważniejsze to model probabilistyczny Blacka–Scholesa oraz model dwumianowy Coxa–Rossa–Rubinsteina (CRR). W artykule zbadano wpływ zjawisk niepewnych na parametry  $d_1$  i  $d_2$ , potrzebne do wyliczenia wartości opcji w modelu Blacka–Scholesa. Dokonano także analizy wrażliwości ceny opcji na wprowadzane do modelu probabilistycznego zakłócenia oraz krótkiego porównania rezultatów tego doświadczenia z wynikami uzyskanymi w innym, analogicznym eksperymencie dotyczącym modelu dwustanowego CRR.

Słowa kluczowe: *wycena opcji, model Blacka–Scholesa, parametry  $d_1$  i  $d_2$ , symulacja stochastyczna*

### 1. Wstęp

Wycena kontraktów opcyjnych jest niezwykle istotna. Najczęściej stosowane są do niej różnego rodzaju modele ekonometryczne, czy też specjalne formuły opracowywane przez znawców problematyki. Obecnie większość modeli wyceny opcji ma swoje źródło w prototypie skonstruowanym w latach siedemdziesiątych XX wieku przez profesorów Fishera Blacka i Myrona Scholesa. Pierwotny model Blacka–Scholesa był stopniowo rozwijany poprzez uchylanie niektórych jego założeń. Na przykład w 1973 roku model ten został zmodyfikowany przez Roberta Mertona. Powstała wtedy tzw. formuła Blacka–Scholesa–Mertona (BSM). Modyfikacja ta pozwalała na oszacowanie poziomów premii opcji na akcje spółek, wypłacających regularnie dywidendy pieniężne. Z kolei w roku 1976 Jonathan Ingersoll uwzględnił w wycenie opcji koszty transakcji. Wtedy też powstał tzw. model Blacka, stosowany obecnie przy wycenie europejskich opcji na kontrakty *futures* i inne instrumenty terminowe. W 1982 roku pojawił się model Jarro-

---

\* Instytut Ekonometrii i Statystyki, Uniwersytet Łódzki, ul. Rewolucji 1905 r., nr 41, 90-214 Łódź, e-mail: [aanusik@uni.lodz.pl](mailto:aanusik@uni.lodz.pl)

wa–Rudda, a przyjęcie założenia, że dla opcji walutowych waluta przekazana w depozyt przynosi odsetki doprowadziło do powstania, w tym samym roku, modelu wyceny opcji walutowych Garmana–Kohlhagena [14, s. 30–33].

Niniejszy artykuł poświęcono tematyce związanej z wykorzystaniem metod symulacyjnych do badania oddziaływania zjawisk niepewnych na parametry potrzebne do wyliczenia wartości opcji w klasycznym modelu Blacka–Scholesa. Dokonano w nim także analizy wrażliwości ceny opcji na wprowadzane do modelu probabilistycznego zakłócenia. Postępowanie takie powinno pomóc w ekonomicznej interpretacji otrzymanych wyników oraz odpowiedzi na pytanie, czy i w jakim stopniu zaburzenie jednej z szacowanych w tym modelu zmiennych ( $\hat{\sigma}$ ) wpłynie na wyliczane w nim wielkości ( $d_1$  i  $d_2$ ).

## 2. Model probabilistyczny Blacka–Scholesa

Jednym z podstawowych modeli wyceny opcji jest model probabilistyczny Blacka–Scholesa. Należy jak dotąd do najpopularniejszych i najczęściej stosowanych modeli wyceny kontraktów opcyjnych. W jego klasycznej wersji zakłada się, że:

- opcja jest europejską opcją kupna na akcje niedające dywidendy<sup>1</sup>,
- krótkoterminowa, wolna od ryzyka stopa procentowa jest stała w okresie do wygaśnięcia opcji i jest ona kapitalizowana w sposób ciągły,
- stopy zwrotu akcji mają rozkład logarytmiczno-normalny,
- rynek jest efektywny, nie ma możliwości arbitrażu pozbawionego ryzyka, nie ma kosztów transakcyjnych, nie płaci się podatków,
- istnieje możliwość tzw. *krótkiej sprzedaży*, rozumianej jako pożyczanie akcji, ich sprzedaż i odkupienie oraz oddanie według wolnej od ryzyka stopy procentowej,
- wszystkie aktywa rynku są nieskończenie podzielne,
- dopuszczalne są ciągłe zmiany cen, występuje ciągły obrót instrumentami finansowymi.

Biorąc pod uwagę wszystkie powyższe założenia i pamiętając, iż wartość opcji kupna uzależniona jest od czasu, który pozostał do terminu jej wygaśnięcia, wartość takiej opcji można wyrazić wzorem

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-r \cdot T} \cdot N(d_2), \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Przez opcję europejską rozumie się opcję, którą można wykonać tylko w jednym określonym dniu, będącym jednocześnie jej dniem wygaśnięcia. Z kolei opcja kupna daje posiadaczowi prawo do zakupu instrumentu pierwotnego (np. akcji) po określonej cenie, w ustalonym terminie, w zamian za uiszczoną opłatę, zwaną premią.

w którym:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + 0,5\hat{\sigma}^2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}, \quad (2)$$

$$d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}, \quad (3)$$

gdzie:

- $C$  – wartość europejskiej opcji kupna,
- $S$  – aktualna cena akcji, obowiązująca na moment wyliczania wartości opcji,
- $X$  – cena wykonania (rozliczenia) opcji,
- $T$  – czas do terminu wygaśnięcia opcji (w latach),
- $\hat{\sigma}$  – szacowane odchylenie standardowe rocznej stopy zwrotu akcji,
- $r$  – wolna od ryzyka stopa procentowa,
- $e$  – podstawa logarytmu naturalnego,
- $\ln$  – logarytm naturalny,

$N(d_1)$ ,  $N(d_2)$  – wartość dystrybuanty rozkładu normalnego w punkcie  $d_1$  i  $d_2$ , odpowiednio.

Wyrażenie  $X \cdot e^{-rT}$  to zdyskontowana aktualna cena wykonania (rozliczenia) opcji, zaś dystrybuanta rozkładu normalnego pozwala na uwzględnienie stopnia ryzyka. W powyższym wzorze konieczne jest oszacowanie rocznego odchylenia standardowego stopy zwrotu ( $\hat{\sigma}$ ). Precyzja, z jaką odchylenie to zostanie oszacowane, wpływa na lokalizację parametrów  $d_1$  i  $d_2$ , a w konsekwencji na wartość samej opcji. Zwykle do oszacowania parametru  $\hat{\sigma}$  wykorzystuje się dane historyczne, dotyczące kształtowania się cen akcji w przeszłości. Zmienność ceny akcji jest wtedy charakteryzowana jako odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji dla okresu jednego roku, przy czym stopa zwrotu kapitalizowana jest w sposób ciągły:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1}} N, \quad (4)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , gdzie logarytmiczna (dzienna) stopa zwrotu akcji określana jest jako

$$z_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), \quad (5)$$

gdzie:

- $\hat{\sigma}$  – szacowane odchylenie standardowe rocznej stopy zwrotu akcji,
- $n$  – liczba historycznych cen akcji (liczebność próby),

$\bar{z}$  – średnia arytmetyczna dla logarytmicznej (dziennej) stopy zwrotu akcji,

$N$  – liczba sesji w ciągu roku,

$S_i$  – cena akcji w okresie  $i$ .

W niniejszym artykule skupiono uwagę na opcjach kupna, ale analogiczną analizę można przeprowadzić dla przypadku wyceny opcji sprzedaży. W tym celu wykorzystuje się tzw. *paritet kupno–sprzedaż*, zwany konwersją. Zakłada się wtedy, że inwestycja jest wolna od ryzyka i polega na zakupie akcji oraz akcyjnej opcji sprzedaży i wystawieniu akcyjnej opcji kupna. Jednocześnie przyjmuje się, iż obie opcje mają tę samą cenę wykonania i termin wygaśnięcia. Przy tych założeniach wzór określający wartość opcji sprzedaży wygląda następująco:

$$P = C - S + X \cdot e^{-r \cdot T} \quad (6)$$

lub

$$P = X \cdot e^{-r \cdot T} N(-d_2) - SN(-d_1), \quad (7)$$

gdzie:

$P$  – wartość opcji sprzedaży,

$C$  – wartość opcji kupna,

$S$  – cena akcji; pozostałe oznaczenia jak wyżej [8, s. 197–199].

### 3. Opis doświadczenia<sup>2</sup>

W zaprezentowanym poniżej przykładzie rozważono przypadek europejskiej opcji kupna z pięciomiesięcznym terminem wykonania, opiewającej na akcje jednej z polskich spółek notowanych na GPW w Warszawie. Dla potrzeb doświadczenia ustalono, iż cena wykonania opcji ( $X$ ) wynosiła 35 złotych. Za aktualną cenę akcji ( $S$ ), na którą opiewała powyższa opcja przyjęto natomiast wartość średnią ze 100 historycznych kursów tych akcji. W rozpatrywanym przypadku wyniosła ona 34 złote.

Postępowanie rozpoczęto od wyliczenia parametrów  $d_1$  i  $d_2$  ze wzorów (2) oraz (3), do czego potrzebna była znajomość takich wielkości jak:  $T$ ,  $r$  i  $\hat{\sigma}$ . W kolejnych krokach zbadano wpływ niepewności zawartej w wielkości  $\hat{\sigma}$  na niepewność w parametrach  $d_1$  i  $d_2$  oraz dokonano analizy wrażliwości ceny opcji na wprowadzane do modelu Blacka–Scholesa zakłócenia.

---

<sup>2</sup> Podobne doświadczenie, przeprowadzone dla modelu Coxa–Rossa–Rubinsteina, opisano w artykule A. Anusik, *Podstawowe modele wyceny kontraktów opcyjnych a metody symulacyjne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego (w druku).

### 3.1. Ustalenie wielkości $T$ , $r$ , $\hat{\sigma}$

Część roku pozostała do wygaśnięcia ( $T$ ) dla opcji z pięciomiesięcznym terminem wykonania wynosi  $T = 5/12 = 0,41(6)$ .

Za odpowiednik wolnej od ryzyka stopy procentowej ( $r$ ) przyjęto wielkość zwrotu z bonów skarbowych o podobnym terminie zapadalności. W badanym przypadku stopa ta wyniosła  $r = 0,04$ .

Wielkość odchylenia standardowego charakteryzującego zmienność zwrotu akcji ( $\hat{\sigma}$ ) ustalono zaś na podstawie danych historycznych, informujących o tym, jak w przeszłości zmieniały się ceny akcji, na które opiewała dana opcja (4). W tym celu posłużono się następującymi danymi:

- informacją o 100 historycznych cenach akcji wybranej spółki notowanej na GPW w Warszawie,
- liczbą sesji w ciągu roku ( $N$ ), która na warszawskiej giełdzie wynosi  $N = 250$ .

Następnie zgromadzone dane podstawiono do opisanych wcześniej wzorów (4) oraz (5), szacując w ten sposób poszukiwaną charakterystykę zmienności cen akcji ( $\hat{\sigma}$ ).

### 3.2. Wykorzystanie symulacji stochastycznej do badania wpływu niepewności pomiaru $\hat{\sigma}$ na parametry $d_1$ oraz $d_2$

O tym jak wielkości  $d_1$  i  $d_2$  reagują na niepewność pomiaru wielkości  $\hat{\sigma}$  można się dowiedzieć m.in. z symulacji stochastycznej. Symulacja stochastyczna polega na wielokrotnym ( $w$ -krotnym, gdzie  $w$  to liczba replikacji) zaburzaniu elementów niepewnych modelu i jego rozwiązaniu. W rozpatrywanym przypadku elementem niepewnym była  $\hat{\sigma}$ . Parametr ten zaburzano ( $\hat{\sigma} + \xi_j$ ), przyjmując, że zakłócenia ( $\xi$ ) mają rozkład normalny. Następnie na podstawie zaburzonej wartości  $\hat{\sigma}$  wyznaczano odpowiednie wartości  $d_{1j}$  i  $d_{2j}$ , gdzie  $j = 1, \dots, 5000$ . W omawianym przykładzie zakłócenia ( $\xi$ ) losowane były analityczną metodą odwracania dystrybucyj, przy czym za wartości zmiennej losującej ( $u1$ ) przyjęto wartości zwracane przez statystyczną funkcję LOS<sup>3</sup>.

Symulację stochastyczną wykonano w programie EViews 3.1. Wyniki doświadczenia, przedstawione w dalszej części artykułu, będą dotyczyć trzech przypadków, gdy zaburzenia miały rozkład normalny  $N(0; \delta \sqrt{\text{var}(\hat{\sigma})})$ , a wielkość  $\delta$  wynosiła ko-

---

<sup>3</sup> Por. J.B. Gajda, *Prognozowanie i symulacje a decyzje gospodarcze*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2001, s. 13–19, 108–109.

lejno: 1, 0,5 oraz 0,1. Wielkość  $\delta$  określała niepewność badacza co do wrażliwości parametrów  $d_1$  i  $d_2$  na siłę wprowadzanych do modelu zaburzeń, zaś miara  $\text{var}(\hat{\sigma})$  oznaczała wariancję estymatora wariancji rocznej stopy zwrotu akcji. Wariancja ta ( $\text{var}(\hat{\sigma})$ ) została oszacowana w wyniku podziału  $n$ -elementowej próby na cztery podpróby i analizy zróżnicowania wartości  $\hat{\sigma}$  w tych podpróbach.

#### 4. Prezentacja i interpretacja otrzymanych wyników

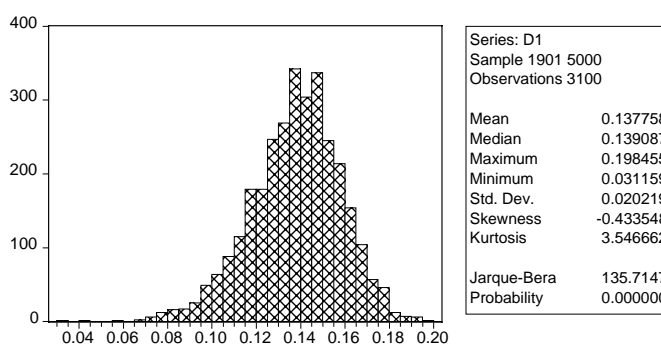
Wyniki uzyskane dla parametrów  $d_1$  oraz  $d_2$  w sytuacji kiedy  $\delta = 1$ , czyli gdy zakłócenia uwzględnione zostały w 100%, zaprezentowano w tabeli 1. Na rysunkach 1 i 2 przedstawiono odpowiadające temu przypadkowi histogramy.

**Tabela 1.** Średnia, odchylenie standardowe, skośność, kurtoza i statystyka Jarque–Bera dla parametrów  $d_1$  oraz  $d_2$  ( $\delta = 1$ )

	$d_1$	$d_2$
Średnia	0,1377	-0,2094
Odchylenie standardowe	0,0202	0,0129
Skośność	-0,4335	0,1193
Kurtoza	3,5466	3,0316
JB	135,7147	7,4914

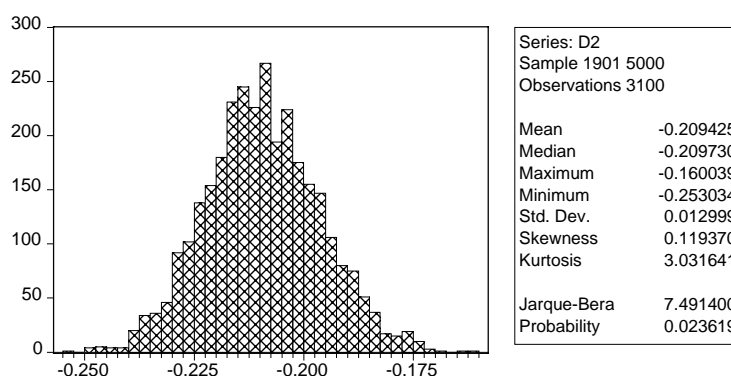
Źródło: Opracowanie własne.

W przypadku standardowego rozkładu normalnego średnia powinna się wahać w granicach zera, odchylenie standardowe winno być bliskie jeden, a współczynniki skośności oraz kurtozy powinny dążyć odpowiednio do zera i trzech.



**Rys. 1.** Rozkład parametru  $d_1$  dla 5000 replikacji ( $\delta = 1$ )

Z kolejnych wierszy tabeli 1 wynika, że zakłócone wartości parametrów  $d_1$  i  $d_2$  nie mają rozkładu normalnego. Widać to zwłaszcza na przykładzie pierwszej z tych charakterystyk, w przypadku której należało jednoznacznie odrzucić hipotezę zerową testu JB mówiącą o tym, że  $d_1$  ma rozkład normalny. Również dla parametru  $d_2$  należało na podstawie statystyki Jarque–Bera odrzucić hipotezę o normalności badanego rozkładu.



Rys. 2. Rozkład parametru  $d_2$  dla 5000 replikacji ( $\delta = 1$ )

Przyczyną zakłócenia normalności obu badanych rozkładów mogła być zarówno zaburzona kurtoza, jak i nadmierna skośność. Z analizy wykresów wynika, iż rozkłady zaburzonych parametrów  $d_1$  i  $d_2$  są nieco bardziej skupione wokół średniej niż w przypadku standardowego rozkładu normalnego. Na przedstawionych histogramach można ponadto zauważyć występowanie asymetrii ujemnej dla  $d_1$  oraz dodatniej dla  $d_2$ . Ponieważ jednak kurtoza w obu omawianych przypadkach jest bliska 3, wydaje się, że skutki niepewności nie zmieniają proporcji pod krzywą rozkładu, a deformujący wpływ uwypukla się przede wszystkim w asymetrii badanego rozkładu.

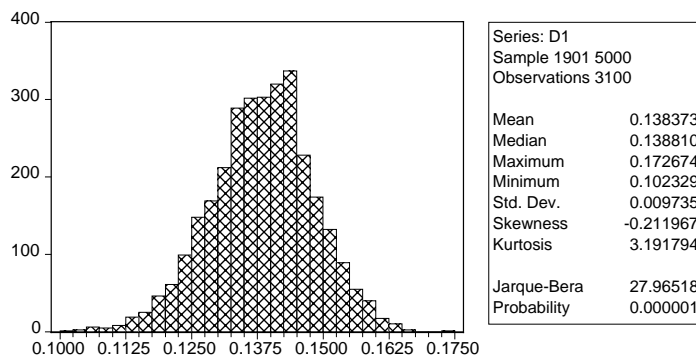
W tabeli 2 przedstawiono wyniki doświadczenia dla zakłóceń równych 50%, tj. dla przypadku, gdy  $\delta = 0,5$ .

Tabela 2. Średnia, odchylenie standardowe, skośność, kurtoza i statystyka Jarque–Bera dla parametrów  $d_1$  oraz  $d_2$  ( $\delta = 0,5$ )

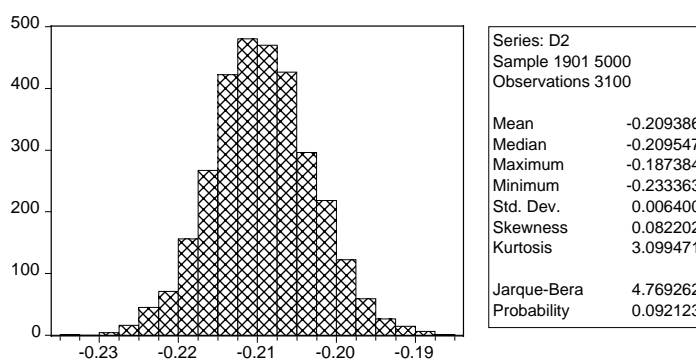
	$d_1$	$d_2$
Średnia	0,1383	-0,2093
Odchylenie standardowe	0,0097	0,0064
Skośność	-0,2119	0,0822
Kurtoza	3,1917	3,0994
JB	27,9651	4,7692

Źródło: Opracowanie własne.

Odpowiadające temu przypadkowi histogramy pokazano na rysunkach 3 i 4.



**Rys. 3.** Rozkład parametru  $d_1$  dla 5000 replikacji ( $\delta = 0,5$ )



**Rys. 4.** Rozkład parametru  $d_2$  dla 5000 replikacji ( $\delta = 0,5$ )

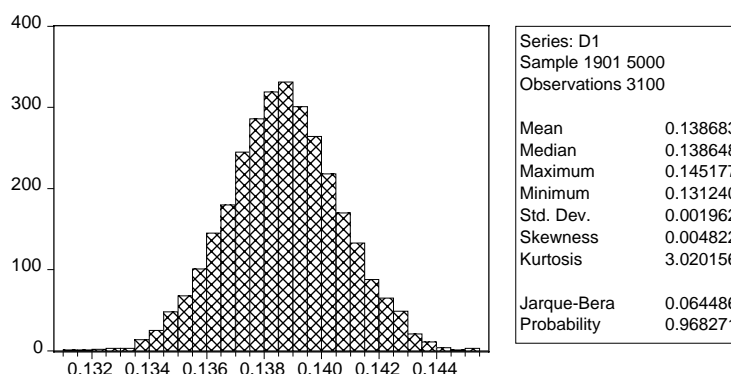
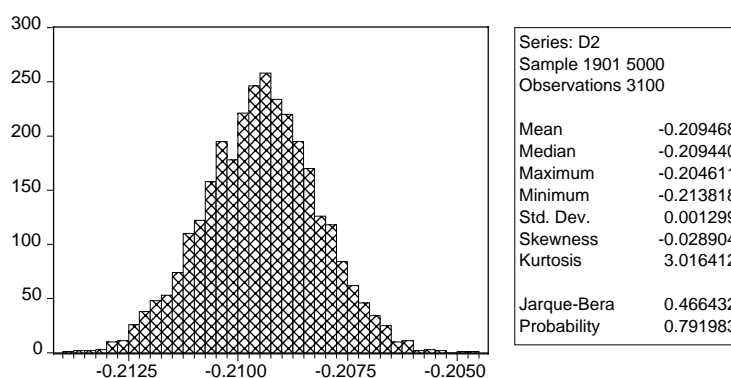
Gdy zaburzenia uwzględnione zostały w 10% ( $\delta = 0,1$ ), otrzymano natomiast wyniki przedstawione w tabeli 3. Na zamieszczonych po tabeli 3 rysunkach (rys. 5 i 6) zaprezentowano wyniki graficznej analizy tego przypadku.

**Tabela 3.** Średnia, odchylenie standardowe, skośność, kurtoza i statystyka Jarque–Bera dla parametrów  $d_1$  oraz  $d_2$  ( $\delta = 0,1$ )

	$d_1$	$d_2$
Średnia	0,1386	-0,2094
Odchylenie standardowe	0,0019	0,0012
Skośność	0,0048	-0,0289
Kurtoza	3,0201	3,0164
JB	0,0644	0,4664

Źródło: Opracowanie własne.



Rys. 5. Rozkład parametru  $d_1$  dla 5000 replikacji ( $\delta = 0,1$ )Rys. 6. Rozkład parametru  $d_2$  dla 5000 replikacji ( $\delta = 0,1$ )

Zauważmy, że rozkłady parametrów  $d_1$  i  $d_2$  stawały się tym bliższe rozkładowi normalnemu, im mniejsza była wariancja zakłóceń. Najlepsze wyniki otrzymano w sytuacji, gdy zaburzenia były małe (10%). W tym też przypadku wpływ zakłóceń na badane wielkości był najmniejszy, a test JB potwierdził, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, mówiącej o normalności rozkładu obu omawianych charakterystyk ( $d_1$  oraz  $d_2$ ). Innymi słowy, im bardziej precyzyjna była wariancja estymatora wariancji rocznej stopy zwrotu akcji  $\text{var}(\hat{\sigma})$  i im mniejsze były zaburzenia ( $\xi$ ), tym parametry  $d_1$  oraz  $d_2$  miały rozkłady bliższe rozkładowi normalnemu<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Przy bezpośrednim porównywaniu wszystkich zaprezentowanych histogramów (od rys. 1 do rys. 6) należy pamiętać o tym, że dla poszczególnych wykresów szerokości przedziałów odkładanych na osi  $X$  były automatycznie układane przez program EViews 3.1, stąd ich zróżnicowanie.

## 5. Analiza wrażliwości ceny opcji na wprowadzane zaburzenia

W niniejszym artykule rozważana była sytuacja, w której aktualna cena rynkowa akcji ( $S$ ) na pięć miesięcy ( $T = 5/12 = 0,41(6)$ ) przed wygaśnięciem europejskiej opcji kupna na akcje nieprzynoszące dywidendy wynosiła 34 zł. Cena wykonania tej opcji ( $X$ ) to 35 zł, wolna od ryzyka stopa procentowa ( $r$ ) wynosiła 4%, a odchylenie standardowe stopy zwrotu akcji ( $\hat{\sigma}$ ) oszacowano na poziomie 0,53.

Przy założeniu, że  $S = 34$  zł i  $X = 35$  zł wartość opcji zakupu ( $C$ ) w momencie realizacji wynosiłaby 0, gdyż opcji tej nie opłacałoby się wykonać. Cena rynkowa akcji ( $S$ ) byłaby bowiem niższa od tej, po której należałoby kupić te akcje realizując kontrakt opcyjny ( $X$ ). W takim przypadku inwestor, posiadający opcję kupna, zaniechałby najprawdopodobniej jej wykonania, decydując się jedynie na utratę uiszczoną przy zawieraniu kontraktu premii opcyjnej.

Jednak opcja giełdowa jest traktowana jak papier wartościowy i może być nabywana lub sprzedawana na rynku w każdym momencie swojego istnienia. Oznacza to, że posiadacz opcji ma możliwość odsprzedania swojego kontraktu i zrealizowania zysku na tym samym rynku, na którym go kupił. W rzeczywistości większość inwestorów skłania się raczej ku odsprzedawaniu opcji na rynku niż wykonywaniu lub porzucaniu ich.

Dla potrzeb analizy można zatem przyjąć, że korzystając ze wzorów Blacka–Scholesa chcemy oszacować wartość opcji na pięć miesięcy przed jej wygaśnięciem. W omawianym przykładzie niezakłócona wartość opcji kupna ( $C$ ) na pięć miesięcy przed terminem jej realizacji wyniosłaby 4,275 zł. Taka cena w modelu Blacka–Scholesa nazywana bywa sprawiedliwą, gdyż kupno lub sprzedaż instrumentu po tej cenie nie powinno przynieść ani zysków, ani strat. Oznacza to, iż aby zarobić, należy kupować poniżej tej ceny, a sprzedawać powyżej niej. Zauważmy, iż nasza opcja zostałaby uznana za niedowartościowaną, gdyby jej aktualna cena rynkowa była niższa od  $C = 4,275$  zł. Wtedy inwestor mógłby chcieć ją rozliczyć. Gdyby zaś bieżąca cena tej opcji była wyższa od  $C = 4,275$  zł, wówczas inwestor najprawdopodobniej uznałby ją za przewartościowaną i nie zechciałby jej zrealizować.

Z przeprowadzonej analizy wrażliwości ceny opcji na opisywane zaburzenia wynika m.in., że gdy zakłócenia te były:

- Duże ( $\delta = 1$ ), wówczas cena opcji kupna ( $C$ ) ulegała znacznym wahaniom i przybierała wartości z przedziału  $\langle 1,285; 4,409 \rangle$ . W tym przypadku wartość opcji po wprowadzonych do modelu zakłóceniach mogła być znacznie niższa od tej wyliczonej na podstawie niezakłóconych danych wyjściowych. Wówczas zmieniał się też interesujący inwestora poziom wartości opcji kupna. Raz mógł on wynieść 1,285 zł, a innym razem 4,409 zł, zwiększając niepewność co do trafności oceny, czy dana opcja będzie przewartościowana, czy niedowartościowana i co do ewentualnej wielkości przewidywanych zysków bądź strat. Innymi słowy, przy dużym rozproszeniu znacznemu

zwiększeniu ulegał przedział wartości opcji informujący inwestora o niepewności podejmowanych przez niego decyzji.

- Średnie ( $\delta = 0,5$ ), wtedy cena opcji zakupu ( $C$ ) odchyłała się o ok.  $\pm 3\%$  od ceny wyliczonej na podstawie danych dla niezaburzonego modelu probabilistycznego i przybierała wartości z przedziału  $\langle 4,144; 4,409 \rangle$ .

- Małe ( $\delta = 0,1$ ), wtedy cena opcji kupna ( $C$ ) zmieniała się w niewielkim zakresie, przybierając wartości z przedziału  $\langle 4,275; 4,277 \rangle$ . W tym właśnie przedziale trudno byłoby radzić inwestorowi, jakie kroki powinien on przedsięwziąć, aby osiągnąć zyski. Dopiero gdyby aktualna cena kontraktu opcyjnego była niższa od  $C = 4,275$  bądź wyższa od  $C = 4,277$ , można by taką opcję uznać za odpowiednio niedowartościowaną lub przewartościowaną.

## 6. Uwagi końcowe

Opisane w niniejszym artykule doświadczenie umożliwiło odpowiedź na pytanie, czy i w jakim stopniu zaburzenie szacowanej w modelu Blacka–Scholesa zmiennej ( $\hat{\sigma}$ ) wpływa na wyliczane w nim parametry  $d_1$  i  $d_2$  oraz cenę samej opcji ( $C$ ). Okazało się m.in., że wprowadzone do tego modelu zaburzenia zakłócają normalność rozkładów tych dwóch wielkości. Powodują także odchylenia w wyliczanej ze wzoru Blacka–Scholesa wartości kontraktu opcyjnego.

Nie bez znaczenia dla rezultatów przeprowadzonego eksperymentu była wielkość zakłóceń wprowadzanych do odchylenia standardowego stopy zwrotu akcji ( $\hat{\sigma}$ ). Niepewność w oszacowaniu wariancji estymatora wariancji rocznej stopy zwrotu akcji ( $\text{var}(\hat{\sigma})$ ) w wyraźny sposób wpływała bowiem na zróżnicowanie wartości  $d_1$  i  $d_2$ . Po zbadaniu trzech przypadków, kiedy wielkość  $\delta$  wynosiła kolejno: 1, 0,5 oraz 0,1, okazało się, że im mniejsze były zaburzenia ( $\xi$ ), tym słabszy był ich wpływ na badane w eksperymencie parametry. Jednocześnie w miarę gdy zaburzenia rosły, rozkłady parametrów  $d_1$  i  $d_2$  stawały się bardziej asymetryczne i wyraźniej odbiegały od rozkładu normalnego. Duże zakłócenia powodowały również znaczne wahania w wyliczanej według formuły Blacka–Scholesa wartości opcji ( $C$ ). Badania wykazały ponadto, że uwzględnienie niepewności związanej z szacowaniem odchylenia standardowego  $\hat{\sigma}$  mogło wzbogacić wiedzę inwestora zarówno o ryzyku podejmowanych przez niego decyzji, jak i o szerokości przedziału wartości opcji kupna ( $C$ ), w którym powinien on zastanowić się co do dalszych kroków, jakie należy podjąć w celu osiągnięcia profitów.

Na zakończenie warto przypomnieć, iż podobne doświadczenie przeprowadzone zostało przez autorkę niniejszego artykułu w pracy pt. *Podstawowe modele wyceny kontraktów opcyjnych a metody symulacyjne* [1]. Główny nacisk położono w nim na badanie wpływu i siły działania zakłóceń wprowadzanych do innego modelu wyceny

opcji, mianowicie formuły Coxa–Rossa–Rubinsteina (CRR). Choć wprowadzone zaburzenia silniej zakłócały normalność rozkładów parametrów z modelu dwumianowego (CRR), wydaje się, że parametry obu wspomnianych modeli reagowały bardzo podobnie na wprowadzane do nich zaburzenia. Mogło to wynikać stąd, iż logika modelu Blacka–Scholesa jest podobna do tej z modelu dwustanowego. Punktem wyjścia w obu formułach jest bowiem portfel pozbawiony ryzyka, składający się z opcji i akcji bazowej dla tej opcji. Przy założeniu braku możliwości występowania arbitrażu, stopa zwrotu z takiego portfela równa jest natomiast wolnej od ryzyka stopie procentowej. Drobne różnice w wynikach eksperymentu (przemawiające na korzyść modelu probabilistycznego) wiązać mogły się zaś z tym, że w modelu Blacka–Scholesa zmiany cen waloru bazowego są ciągłe, natomiast u Coxa–Rossa–Rubinsteina zachodzą one w sposób skokowy. Problem ten można by jednak rozwiązać, przyjmując w modelu dwumianowym CRR nieskończoną liczbę okresów, na które podzielony zostałby czas do wygaśnięcia opcji. Wtedy wynik, jaki przyniósłby ten model, powinien być identyczny z tym, który otrzymano by przy wykorzystaniu modelu probabilistycznego Blacka–Scholesa [6, s. 75].

### Bibliografia

- [1] ANUSIK A., *Podstawowe modele wyceny kontraktów opcyjnych a metody symulacyjne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego (w druku).
- [2] CRAWFORD G., SEN B., *Derivatives for Decision Makers: Strategic Management Issues*, John Wiley & Sons, New York 1996, s. 20, 81.
- [3] DĘBSKI W., *Rynek finansowy i jego mechanizmy*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2002, s. 431–435.
- [4] FORD D., *Opcje giełdowe*, Wydawnictwo K.E. LIBER, Warszawa 1997, s. 36–37.
- [5] GAJDA J.B., *Prognozowanie i symulacje a decyzje gospodarcze*, Wydawnictwo C. H. Beck, Warszawa 2001, s. 13–19, 108–109.
- [6] GOLEC G., *Opcje na polskim rynku finansowym. Wycena, strategie*, Wydawnictwo Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej, Lublin 2002, s. 75.
- [7] HULL J., *Options, Futures & Other Derivatives*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York 2000, s. 250–252.
- [8] JAJUGA K., JAJUGA T., *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finansowe, inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004, s. 197–199.
- [9] JAJUGA K., JAJUGA T., *Jak inwestować w papiery wartościowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1994, s. 77–79.
- [10] KOLB R., OVERDAHL J.A., *Futures, Options and Swaps*, Blackwell Publishing, Malden, MA 2007, s. 449–456.
- [11] NATENBERG S., *Option Volatility & Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques*, Probus Publishing, Chicago 1994, s. 431–443.
- [12] REILLY F.K., *Investments*, The Dryden Press, New York 1992, s. 466.
- [13] TARCZYŃSKI W., *Instrumenty pochodne na rynku kapitałowym*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2003, s. 95–100.

- [14] WERON A., WERON R., *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998, s. 30–33.

### **The research into the impact of the uncertain factors on the Black–Scholes model parameters**

Option pricing is one of the most important issues while dealing with this sort of terminal assets. At present, the probabilistic Black–Scholes model and the binomial Cox–Ross–Rubinstein model are the most popular and widely used to this end. Therefore, the paper discusses the impact of the uncertain factors on the Black–Scholes model parameters  $d_1$  and  $d_2$ . The author poses a question of how the introduction of the disturbances to the Black–Scholes sigma parameter affects the parameters  $d_1$  and  $d_2$ . To find it out, the stochastic simulation is used. Also such measures as mean, standard deviation, skewness, kurtosis and Jarque–Ber test are employed here. According to the results of the experiment described above, the intensity of the disturbances introduced to the model plays the key role. In the final part of the article, these results are briefly compared to the ones obtained in another, similar research in which the Cox–Ross–Rubinstein model parameters were disturbed. The comparison shows that the results obtained from both experiments are very similar. However, it should be underlined that they are slightly better for the probabilistic model of Black–Scholes.

Keywords: *option pricing, Black–Scholes model,  $d_1$  and  $d_2$  parameters, stochastic simulation*